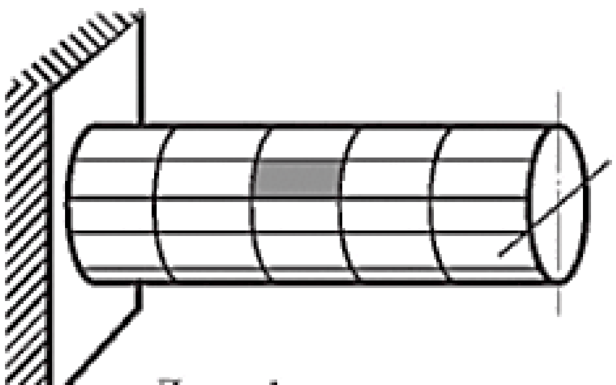
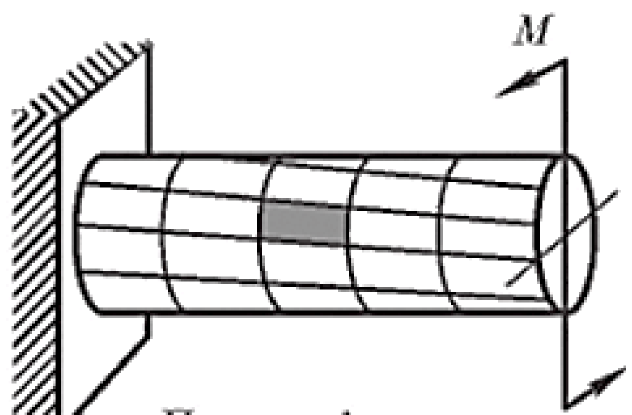
Лекция 5

Крутящий момент
Кручение прямого бруса круглого сечения
Расчет бруса круглого поперечного сечения на прочность и жесткость



До деформации



После деформации

КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Кручение – вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент Т.

Остальные силовые факторы (*N, Qy, Qz, My, Mz*) - отсутствуют.

Вал – брус, работающий на кручение.

Принято:

- внешние силовые факторы называть вращающими или скручивающими моментами и обозначать *M*;

- внутренние усилия – крутящим моментом *T.*

В расчетах на прочность и жесткость при кручении знак крутящего момента значения не имеет, но для удобства построения эпюр принято правило: Крутящий момент считают положительным, если при взгляде в торец отсеченной части бруса он стремится вращать сечение против хода часовой стрелки.

Положительный крутящий момент вызывает положительные касательные напряжения

ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

На основании метода сечений крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.

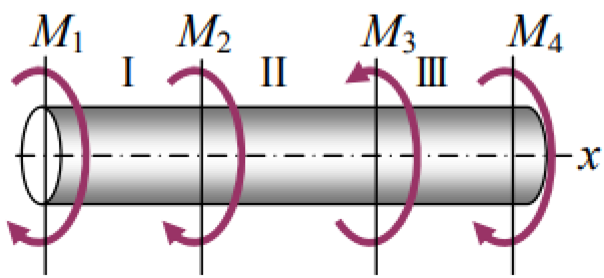
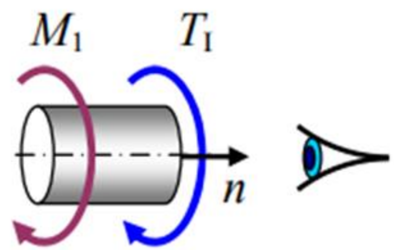


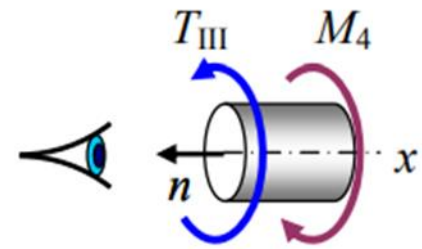
Схема нагружения вала



определение внутреннего усилия на участке I

$$\sum M_x = 0;$$

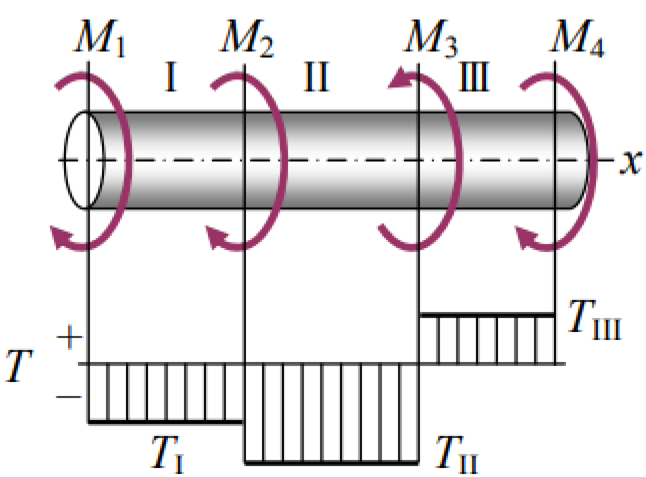
$$T_I + M_1 = 0; \quad T_I = -M_1.$$



определение внутреннего усилия на участке III

$$\sum M_x = 0;$$

$$T_{III} - M_4 = 0; \quad T_{III} = M_4.$$



Эпюра крутящих моментов

Эпюра крутящих моментов – **график изменения крутящих моментов по длине бруса**

Во всех случаях эпюры внутренних усилий строят на осевой линии бруса. Величину силового фактора откладывают по нормали к оси.

НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Теория брусьев, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях:

- поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в деформированном состоянии – гипотеза твердых дисков (Бернулли).

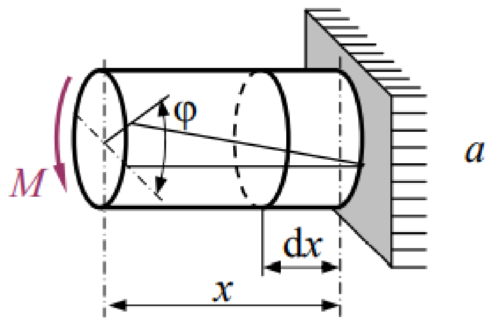
- радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину; поперечные сечения остаются круглыми.

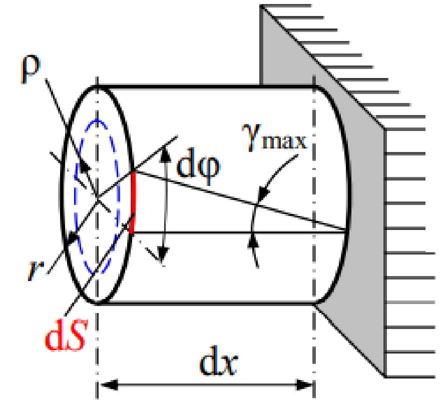
- расстояния между поперечными сечениями вдоль оси бруса не изменяются.

Этапы решения задачи:

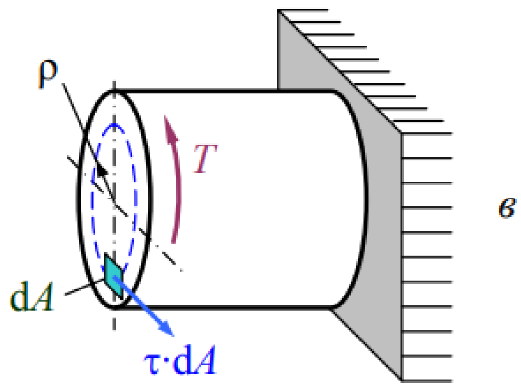
1. Условие равновесия – статическая сторона задачи

а **- брус под действием внешнего скручивающего момента *М***

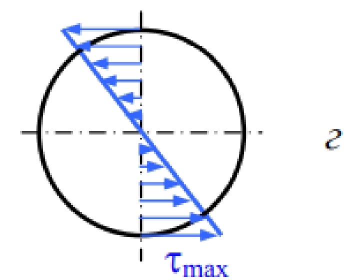




б **– деформация элементарного участка *dx***



в **- внутреннее усилие *Т* и напряжения *τ* в поперечном сечении**



г **- распределение касательных напряжений τ в поперечном сечении**

Равнодействующий момент касательных напряжений

$$\boxed{T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot \mathrm{d}A}$$

$\rho \cdot (\tau \cdot \mathrm{d}A)$ **– элементарный крутящий момент**

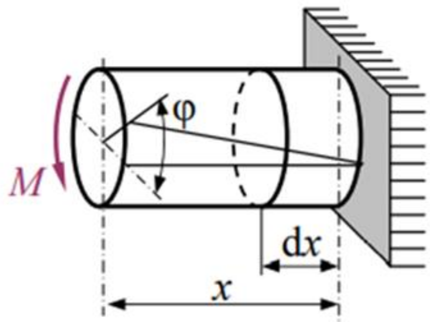
$\tau \cdot \mathrm{d}A$ **- элементарное усилие**

2. Физическая сторона задачи

закон Гука при сдвиге $\tau = G \cdot \gamma$

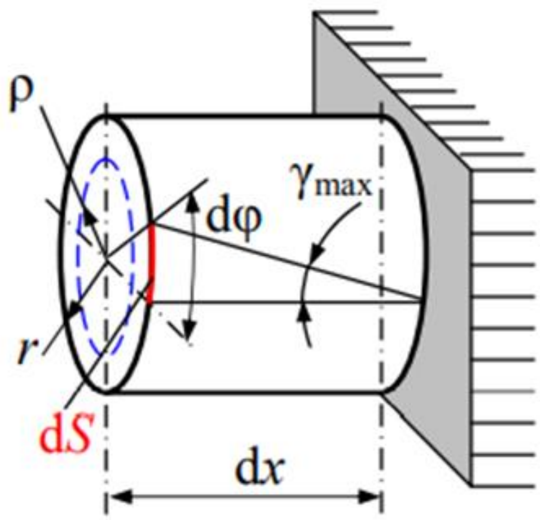
связывающий касательные напряжения τ с деформацией сдвига γ

3. Деформационная (геометрическая) сторона задач



Левый торец бруса длиной *x* под действием внешнего скручивающего момента *M* повернется на угол φ

В элементе длиной *dx* аналогичный угол $d\varphi$



Образующая цилиндра отклоняется от исходного положения на угол γ

На поверхности элемента радиусом *r* угол принимает максимальное значение γ

$$\gamma_{max} \approx \operatorname{tg} \gamma_{max} = \frac{dS}{dx} = \frac{r \cdot d\varphi}{dx}$$

В цилиндре произвольного радиуса ρ внутри элемента угол γ

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

4. Математическая сторона задачи

Уравнение $\gamma = \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$ **подставляем в** $\tau = G \cdot \gamma$

Получим уравнение $\tau = G \cdot \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$ **которое подставим в** $T = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA$

Получаем

$$T = \int_A \rho^2 G \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA$$

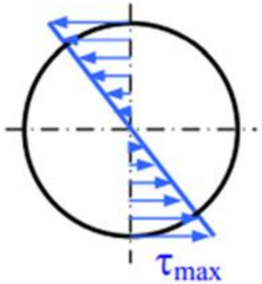
Обозначив $\int_A \rho^2 dA = I_p$ **как** **полярный момент инерции** **(геометрическая характеристика поперечного сечения),**

получим $T = I_p G \dfrac{d\varphi}{dx}$, **откуда** $\dfrac{d\varphi}{dx} = \dfrac{T}{G \cdot I_p}$.

Относительный угол закручивания элементарного участка $d\varphi / dx$

подставим в $\tau = G \cdot \rho \dfrac{d\varphi}{dx}$

и получим напряжение в произвольной точке сечения $\boxed{\tau = \dfrac{T \cdot \rho}{I_p}.}$



Закон распределения касательных напряжений – линейный.

В центре $\tau = 0$**, так как** $\rho = 0$**,**

на периферии $\tau = \tau_{max}$ **, так как** $\rho_{max} = r$

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ

Условие прочности при кручении

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau]}$$

W_p **- полярный момент сопротивления**

Для круга $W_p = \dfrac{\pi D^3}{16}.$

Для кольца $W_p = \dfrac{\pi D^3}{16}\left(1 - c^4\right),\quad c = \dfrac{d}{D}$ **- коэффициент пустотелости**

Для сечений некруглого профиля моменты инерции и моменты сопротивления вычисляют по специальным формулам, включающим высоту и ширину профиля

Допускаемое напряжение при кручении - $[\tau] = (0{,}5\text{–}0{,}6)[\sigma].$

При расчете конструкций на прочность встречаются три типа задач, которые используют условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} \le [\tau]$$

1. Поверочный расчет (проверка прочности)

Вычисляют τ_{max} и сравнивают его с допускаемом касательном напряжением $[\tau]$, определяя недогрузку или перегрузку в %, либо находят коэффициент запаса прочности и сравнивают его с нормативными значениями

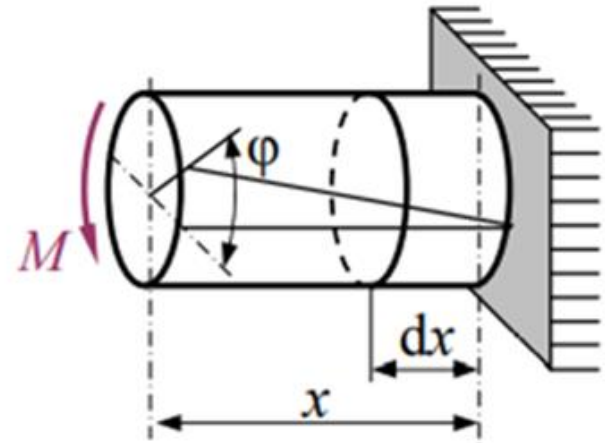
2. Проектный расчет (подбор сечения)

Вычисляют диаметр вала *D* при известных значениях крутящего момента *T* и допускаемого касательного напряжения $[\tau]$

3. Определение несущей способности

Определяют допускаемый крутящий момент при известных диаметрах вала *D* при известных значениях *T* и допускаемом касательном напряжении $[\tau]$

ДЕФОРМАЦИЯ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ



Из уравнения $$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{G \cdot I_p}$$

находим угол закручивания элементарного участка $$d\varphi = \frac{T}{G \cdot I_p} dx$$

Угол закручивания всего вала $$\varphi = \int_{\ell} \frac{T}{G \cdot I_p} dx$$

Для вала постоянной жесткости сечения (произведение $G \cdot I_p$) на длине *ℓ* и постоянного крутящего момента *T*

угол закручивания вала $$\boxed{\varphi = \frac{T \cdot \ell}{G \cdot I_p}}$$ **Закон Гука при кручении**

$G \cdot I_p$ **- жесткость сечения при кручении**